I. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§1. Сходимость и расходимость ряда. Необходимый признак сходимости.

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность чисел

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

Тогда выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \tag{1}$$

называется числовым рядом, а сами числа $a_1, a_2, ...$ – членами ряда. Сумма n первых членов ряда называется n-й частичной суммой ряда и обозначается S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n \,. \tag{2}$$

Если существует предел S бесконечной последовательности чисел $S_1, S_2, ..., S_n, ...$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{3}$$

то этот предел называют суммой ряда (1), а сам ряд (1) в этом случае называется сходящимся. Если же предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд (1) называют расходящимся. Расходящийся ряд суммы не имеет. Однако, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то иногда говорят, что ряд (1) имеет бесконечную сумму.

Пусть ряд (1) сходится. Тогда его частичная сумма S_n является приближённым значением для суммы S. Погрешность этого приближения

$$r_n = S - S_n \tag{4}$$

называется остатком ряда. Этот остаток является суммой ряда:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + ... \tag{5}$$

Если ряд (1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 \,.$$

Бесконечная геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \quad (a \neq 0) \tag{6}$$

есть сходящийся числовой ряд, если $|q| < 1$. Сумма ряда (6) равна в этом случае

$$S = \frac{a}{1-q} \,.$$

В случае $|q| \geq 1$ ряд (6) расходится.

Если ряд (1) имеет сумму S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots \tag{7}$$

сходится и имеет сумму $c \cdot S$. Если же ряд (1) расходится, то (при $c \neq 0$) расходится и ряд (7).

Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, т. е., если даны сходящиеся ряды

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{8}$$

$$\sigma = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{9}$$

то ряды

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots \tag{10}$$

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n) + \ldots \tag{11}$$

тоже сходятся, и суммы их соответственно равны $S + \sigma$ и $S - \sigma$.

Свойство сходимости или расходимости ряда не нарушается, если отбросить или прибавить к нему любое конечное число членов.

Необходимый признак сходимости ряда:

Если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Обратное утверждение неверно. Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не следует. Для сходимости ряда общий член ряда должен не просто стремиться к нулю, но делать это достаточно быстро.

Пример 1. Члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, называемого гармоническим, стремятся к нулю с ростом их номеров ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$), однако этот ряд расходится, его $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. (Расходимость может быть доказана интегральным признаком).

Пример 2. Члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ тоже стремятся к нулю с ростом их номеров ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$), но убывают быстрее, чем члены гармонического ряда. Этот ряд уже является сходящимся, его сумма может быть найдена по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{2} \Big/ \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

С помощью необходимого признака сходимости нельзя доказать сходимость ряда, но иногда удаётся доказать расходимость, применяя следствие из необходимого признака, которое легко доказывается от противного.

Следствие из необходимого признака сходимости:

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$**, то ряд расходится.**

Пример 3. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Общий член этого ряда $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. На основании следствия из необходимого признака заключаем, что данный ряд расходится.

Пример 4. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{n^2+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2/n}{1+1/n^2} = 0$. Необходимый признак выполняется, поэтому ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся, что можно установить лишь после дополнительного исследования.

Исследование сходимости рядов, как правило, сводится к вычислению некоторых пределов, при этом часто используются известные условия эквивалентности бесконечно малых, которые применительно к рядам принимают вид при $n \to \infty$:

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n},$$

$$\arcsin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n},\quad \operatorname{arctg}\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n},\quad e^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n},$$

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ (формула Стирлинга).}$$

Часто также приходится иметь дело с пределами:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^p}=0\ \ (p>0),\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p}=1.$$

§2. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости.

Рассмотрим числовые ряды с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots\quad (a_n>0) \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots\quad (b_n>0) \tag{2}$$

Первый признак сравнения. Если для $n\ge n_0$ $a_n\le b_n$ и ряд (2) сходится, то сходится также и ряд (1). Если для $n\ge n_0$ $a_n\ge b_n$ и ряд (2) расходится, то расходится и ряд (1).

Второй признак сравнения. Если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A\ne 0,$$

то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

При использовании признаков сравнения исследуемый ряд часто сравнивают или с бесконечной геометрической прогрессией

$$\sum_{n=1}^{\infty}a\cdot q^n\quad (a\ne 0),$$

которая при $|q|<1$ сходится, а при $|q|\ge 1$ расходится, или с рядом Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

(p – действительное число). При p = 1 этот ряд является гармоническим (можно сравнивать и с другими известными рядами).

Признак Даламбера. Пусть для ряда (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q.$$

Если $q<1$, то ряд сходится, если $q>1$, то ряд расходится. При $q=1$ вопрос о сходимости ряда остаётся нерешённым.

<u>Признак Коши.</u> Пусть для ряда (1)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q.$$

Если $q<1$, то ряд сходится, если $q>1$, то ряд расходится. При $q=1$ вопрос о сходимости ряда остаётся нерешённым.

<u>Интегральный признак.</u> Если $f(x)$ – неотрицательная невозрастающая функция при $x > 0$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Замечание 1. Нижним пределом интегрирования может быть любое другое положительное число из области определения функции.

Замечание 2. С помощью интегрального признака легко доказать, что ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Примеры

Пример 1. Выяснить, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Данный ряд знакоположительный. Сравним его с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. Члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\ge\frac{1}{n}\quad (n=1, 2, 3, ...).$$

По первому признаку сравнения из расходимости гармонического ряда следует расходимость данного ряда.

Замечание. Расходимость данного ряда можно доказать с помощью интегрального признака или просто указать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ есть ряд Дирихле при $p=\frac{1}{2}$. Так как $p < 1$, то ряд расходится.

Пример 2. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}.$$

Данный ряд знакоположительный. Сравним его с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, который является сходящейся геометрической прогрессией с

$$q=\frac{2}{3}<1.$$

По первому признаку сравнения сравним соответствующие члены двух рядов:

$$\frac{2^n}{n\cdot 3^n}\le\frac{2^n}{3^n}\quad (n=1,2,...).$$

Так как члены данного ряда меньше соответствующих членов сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, то данный ряд сходится.

Пример 3. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}.$$

Данный ряд является знакоположительным. Применим второй признак сравнения, для сравнения возьмём гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который является расходящимся. Найдём

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\left|\begin{array}{c}\frac{1}{n}=\alpha\\ \alpha\to 0\end{array}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

По второму признаку сравнения данный ряд и гармонический ведут себя одинаково, т. е. из расходимости гармонического следует, что и данный ряд расходится.

Пример 4. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Данный ряд перепишем в виде $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. Это – ряд Дирихле при $p=\frac{3}{2}$. Так как $p>1$, то данный ряд сходится.

Пример 5. С помощью интегрального признака доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}.$$

Общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} = f(n)$. Записывая в этой формуле x вместо n, получаем функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Эта функция удовлетворяет условиям интегрального признака: она принимает положительные значения и убывает с возрастанием x. Вычислим

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как интеграл сходится, то сходится и данный ряд.

Замечание. Сходимость данного ряда можно доказать также по второму признаку сравнения, взяв для сравнения ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, сходящийся, так как $p = 2 > 1$.

Пример 6. С помощью признака Даламбера выяснить, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!}.$$

Общий член ряда $a_n = \dfrac{n^n}{2^n \cdot n!}$. Заменяя всюду n на $(n+1)$, получим: $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$. Находим:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot n!}{2^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{2 \cdot n^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

Но $\mathrm{e} > 2$, значит, $\dfrac{\mathrm{e}}{2} > 1$, откуда, согласно признаку Даламбера, ряд расходится.

Пример 7. Применяя признак Коши, исследовать, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n.$$

Общий член ряда $a_n = \left(\dfrac{3n+1}{2n-1}\right)^n$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n} = \frac{3n+1}{2n-1};$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}.$$

Так как предел $\frac{3}{2}>1$, то, согласно признаку Коши, ряд расходится.

Замечание. Расходимость этого ряда можно доказать иначе. Ряд расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)^n=\infty.$$

§3. Знакопеременные ряды.

Числовой ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется знакопеременным.

Пусть дан знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (1)

Рассмотрим ряд (2), составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=|a_1|+|a_2|+...+|a_n|+... \qquad (2)$$

Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1). Ряд (1) в этом случае называется абсолютно сходящимся.

Если ряд (2) расходится, то из этого не следует, вообще говоря, что и (1) расходится: ряд (1) может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Возможен случай, когда ряд (1) сходится, а (2) расходится; тогда ряд (1) называется условно (неабсолютно) сходящимся.

Признак Лейбница для знакопеременных рядов.

Если члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n=a_1-a_2+...+(-1)^n\cdot a_n+... \quad (a_n>0) \qquad (3)$$

1) монотонно убывают по абсолютной величине:

$$a_{n+1}<a_n \quad (n=1,2,3,...)$$

2) и стремятся к нулю: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$**,**

то ряд (3) сходится, сумма его *S* положительна и не превосходит первого члена ряда:

$$0<S<a_1.$$

Если знакочередующийся ряд начинается с отрицательного члена:

$$-a_1+a_2-a_3+... \quad (a_n>0),$$

и для этого ряда выполнены условия 1) и 2) теоремы Лейбница, то и такой ряд сходится, сумма его S отрицательна и удовлетворяет неравенству

$$-a_1 < S < 0.$$

При замене суммы S ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, суммой n его первых членов (S_n) абсолютная величина ошибки $|r_n|$ не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов:

$$|r_n| \le |a_{n+1}|.$$

Знак ошибки (знак r_n) совпадает со знаком первого из отброшенных членов. Здесь $r_n = S - S_n$ (см. §1).

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots$, называемый рядом Лейбница, сходится по признаку Лейбница. В то же время ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

расходится (гармонический ряд). Таким образом, ряд Лейбница – условно (неабсолютно) сходящийся ряд.

Пример 2. Ряд $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \quad (p > 0) \tag{4}$$

является знакочередующимся. При $p > 0$ он удовлетворяет условиям признака Лейбница:

1) $\frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{n^p} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

и, следовательно, сходится.

Если заменить все члены их абсолютными величинами, получим ряд Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$ (см. §2). Таким образом, ряд (4) при $p > 1$ сходится абсолютно, а при $0 < p \le 1$ сходится условно.

Пример 3. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$.

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда, т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^3}=\frac{|\sin 1|}{1^3}+\frac{|\sin 2|}{2^3}+\ldots+\frac{|\sin n|}{n^3}+\ldots \qquad (5)$$

Так как $|\sin\ n| \le 1$, то каждый член ряда (5) не превышает соответствующего члена ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots \qquad (6)$$

Ряд (6) является рядом Дирихле, т. е. рядом вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где $p = 3$. Так как $p > 1$, то ряд (6) сходится. Согласно первому признаку сравнения, ряд (5) также сходится. Тогда, по теореме об абсолютной сходимости, данный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Пример 4. Сколько членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^3}=1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n^3}+\ldots$$

нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

Данный ряд является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим всем условиям признака Лейбница:

$$1>\frac{1}{2^3}>\frac{1}{3^3}>\frac{1}{4^3}>\ldots;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0.$$

Следовательно, данный ряд сходится, притом абсолютно.

Чтобы вычислить сумму этого ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член, абсолютная величина которого меньше 0, 001, т. е.

$\frac{1}{n^3}<0{,}001$ или $n^3>1000$, иначе говоря, $n > 10$. Следовательно, нужно просуммировать 10 первых членов данного ряда. Так как

$$a_{11}=\frac{1}{11^3}<0{,}001,$$

то получаем следующую оценку для ошибки:

$$|r_{10}|\le a_{11}<0{,}001.$$

Пример 5. Исследовать, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Данный ряд знакочередующийся. Абсолютная величина его общего члена

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},$$

т. е. общий член ряда к нулю не стремится, ряд расходится (не выполнен необходимый признак сходимости).

В заключение темы "Числовые ряды" напомним, какие признаки сходимости можно применять к рядам с положительными членами, и какие – к знакопеременным рядам:

Необходимый признак сходимости

Ряды с положительными членами	Знакопеременные ряды
Признаки сравнения Признак Даламбера Признак Коши Интегральный признак	Теорема Лейбница (знакочередующиеся ряды) Теорема об абсолютной сходимости (знакопеременные ряды)

II. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§1. Сходимость функциональных рядов.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

называется функциональным, если его члены являются функциями от аргумента x.

При каждом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд (1) становится числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots \qquad (2)$$

Если ряд (2) сходится, то x_0 называется точкой сходимости ряда (1). Совокупность всех точек сходимости x функционального ряда (1) называется его областью сходимости, а функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

– суммой данного ряда. Функция

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

называется остатком ряда (1).

Если ряд (2) расходится, то значение x_0 называется точкой расходимости ряда.

В простейших случаях для определения области сходимости ряда (1) можно применять к нему известные признаки сходимости числовых рядов, считая x фиксированным.

§2. Степенные ряды.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots, \quad (1)$$

где a_n (n = 0, 1, 2, …) – числа, называемые коэффициентами ряда. При $a = 0$ ряд принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (2)$$

Теорема Абеля.

1) Если ряд (2) **сходится при** $x = x_0 \neq 0$**, то он абсолютно сходится при любом значении** x**, удовлетворяющем неравенству** $|x| < |x_0|$**.**

2) Если ряд (2) **расходится при** $x = x_1$**, то он расходится и при любом значении** x**, для которого** $|x| > |x_1|$**.**

Область сходимости степенного ряда (2) есть симметричный относительно начала координат O интервал $(-R,\ R)$, называемый интервалом сходимости ряда (2). Число R $(0 \le R < +\infty)$ называется радиусом сходимости ряда (2).

Радиус сходимости может быть вычислен по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (3)$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (4)$$

Степенной ряд (2) внутри интервала сходимости сходится абсолютно. Вне интервала сходимости ряд (2) расходится. При $x = -R$ или $x = R$ ряд (2) может оказаться расходящимся, сходящимся условно или сходящимся абсолютно.

Степенной ряд (1) сходится абсолютно на интервале

$$(a - R,\ a + R).$$

На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, сумма степенного ряда есть непрерывная функция.

Если пределы интегрирования α, β лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то определённый интеграл от суммы ряда в этих пределах равен сумме таких же интегралов от членов ряда. Интервал сходимости нового ряда остаётся прежним.

Пусть

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

– степенной ряд, имеющий интервал сходимости $(-R, R)$. Тогда ряд

$$\varphi(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$$

сходится на том же интервале, и его сумма $\varphi(x) = S'(x)$ при $|x| < R$.

Простейшим примером степенного ряда является геометрическая прогрессия $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$. Этот ряд сходится при $|q| = |x| < 1$. Следовательно, для данного ряда радиус сходимости $R = 1$, а интервалом сходимости является интервал $(-1, 1)$. Сумма этого ряда равна

$$S(x) = \frac{1}{1-x}$$

(в соответствии с формулой $S(x) = \frac{a}{1-q}$, $a = 1$, $q = x$). Поэтому для функции $S(x) = \frac{1}{1-x}$ имеем следующее разложение в степенной ряд:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \quad (|x| < 1) \tag{5}$$

Пример 1. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Применим формулу (4):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

$R = \infty$, значит, ряд сходится при всех x, т. е. в интервале $(-\infty, +\infty)$. Заметим для дальнейшего, что из сходимости ряда вытекает: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ при всех x.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n.$$

Радиус сходимости найдём по признаку Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot (n+1)!}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Таким образом, ряд сходится на интервале $-\frac{1}{\mathrm{e}} < x < \frac{1}{\mathrm{e}}$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала:

1) На левом конце ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot \left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$, т. е. является знакочередующимся. Абсолютная величина его общего члена $\frac{n^n}{n! \cdot \mathrm{e}^n}$ с учётом формулы Стирлинга (стр. 4) эквивалентна при $n \to \infty$

$$\frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\cdot \mathrm{e}^n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\to 0\,.$$

По теореме Лейбница, ряд на левом конце интервала сходится.

2) На правом конце интервала ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\cdot \mathrm{e}^n}$;

$$a_n=\frac{n^n}{n!\cdot\mathrm{e}^n}\sim\frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\cdot\mathrm{e}^n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot n^{1/2}}\,.$$

Это – ряд Дирихле при $p=\frac{1}{2}$, поэтому данный ряд на правом конце своего интервала сходимости расходится.

Таким образом, область сходимости ряда есть промежуток $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}};\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

§3. Ряд Тейлора.

Пусть функция $f\,(x)$ имеет на некотором отрезке непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, а точка a находится внутри этого отрезка. Тогда для любого x из этого отрезка имеет место формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)\,, \tag{1}$$

где остаточный член $R_n(x)$ может быть записан в виде

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{2}$$

(форма Лагранжа), причём ξ лежит между a и x.

Очевидно, число ξ можно записать также в виде $a+\theta\,(x-a)$, где $0<\theta<1$.

В случае $a=0$ формула Тейлора принимает вид:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)\,, \tag{3}$$

где

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta\cdot x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1)\,. \tag{4}$$

Формула (3) носит название формулы Маклорена.

Если функция $f\,(x)$ имеет производные всех порядков на некотором отрезке, содержащем внутри себя точку a, и выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \qquad (5)$$

для всех x из указанного отрезка, то функция на этом отрезке является суммой степенного ряда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \qquad (6)$$

Этот ряд называется рядом Тейлора для данной функции.

В случае $a = 0$ ряд Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (7)$$

Этот ряд называется рядом Маклорена для данной функции.

Разложение функции в степенной ряд единственно, т. е., если функция $f(x)$ разложена каким-либо образом в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots,$$

то $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Формально ряд Тейлора можно написать для всякой функции, которая в окрестности точки a имеет производные любого порядка. Однако этот ряд будет сходиться к породившей его функции $f(x)$ только при тех значениях x, при которых остаточный член $R_n(x)$ при неограниченном возрастании n стремится к нулю.

Для разложения данной функции в ряд Тейлора нужно:

1) Написать ряд Тейлора для данной функции, т. е. вычислить значения этой функции и её производных при $x = a$ и подставить их в общее выражение ряда Тейлора (6);

2) исследовать остаточный член R_n формулы Тейлора для данной функции и определить те значения x, при которых полученный ряд сходится к данной функции, т. е. при которых $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

При разложении функций в степенные ряды часто используются разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty) \qquad (8)$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty) \qquad (9)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty) \qquad (10)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (-1 < x \le 1) \qquad (11)$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+... \quad (-1<x<1) \tag{12}$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+... \quad (-1<x<1) \tag{13}$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n\cdot x^n+... \quad (-1<x<1) \tag{14}$$

В скобках указаны промежутки, на которых верны данные разложения.

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f\,(x)$ = arcsin x, используя разложение функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Разложим $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в ряд Маклорена, для чего воспользуемся формулой (12), заменив в этой формуле x на $-x^2$ и положив $\alpha=-\frac{1}{2}$. Получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+...+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n}x^{2n}+...$$

Этот ряд сходится при $|x|<1$. Интегрируя его по промежутку $[0,\ x]$, где $0<x<1$, находим:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^x\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+...\right)dx=$$

$$=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+...+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$$

Так как $\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$, то

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}\cdot x^3+...+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...$$

Полученный ряд сходится при $|x|<1$ (см. §2).

§4. Приложения степенных рядов.

Ряды широко используются в приближённых вычислениях. С помощью рядов с заданной точностью можно вычислить значения корней, тригонометрических функций, логарифмов чисел, определённых интегралов. Ряды применяются также при интегрировании дифференциальных уравнений.

Интегрирование многих дифференциальных уравнений не приводится к квадратурам, а их решения не выражаются в элементарных функциях. Решения некоторых из этих уравнений могут быть представлены в виде степенных рядов, сходящихся в определённых интервалах. Ряд, являющийся решением дифференциального уравнения, можно найти или способом неопределённых коэффициентов, или способом, основанным на применении ряда Тейлора (Маклорена). Способ неопределённых коэффициентов особенно удобен в применении к линейным уравнениям.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$ с точностью 10^{-4}.

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, для этого в основное разложение (8), §3 подставим $-x^2$ вместо x:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Этот ряд можно интегрировать в любых конечных пределах, т. е.

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1/4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{1/4} x^{2n}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(\left. \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|_0^{1/4} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot (2n+1) \cdot 4^{2n+1}}.$$

Полученный числовой ряд есть знакочередующийся, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, поэтому если мы возьмём для вычислений несколько первых членов ряда, то ошибка, которая при этом будет сделана, не превзойдёт абсолютной величины первого из отброшенных членов.

Замечаем, что третий член ряда

$$\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} = \frac{1}{10240} < 10^{-4}.$$

Следовательно, чтобы вычислить интеграл с точностью до 10^{-4}, достаточно взять всего два члена ряда. С требуемой точностью

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{192} \approx 0{,}2448.$$

Пример 2. Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего условию $y = \frac{1}{2}$ при $x = 0$.

Искомое решение запишем в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Найдём выражения для трёх производных, дифференцируя исходное уравнение:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''' = 2 + 2 \cdot (y')^2 + 2yy'', \quad y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy'''.$$

Вычислим значения этих производных при $x = 0$, принимая во внимание начальное условие $y(0) = \frac{1}{2}$ и данное уравнение $y' = x^2 + y^2$, откуда

$$y'(0) = 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};\ y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

$$y'''(0) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{8};\ y^{(4)}(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{19}{8} = \frac{11}{4}.$$

Подставляя эти значения в ряд Маклорена, получаем:

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{19}{48}x^3 + \frac{11}{96}x^4 + \ldots$$