III. РЯДЫ ФУРЬЕ

1. Рядом Фурье функции $f\,(x)$, определённой на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n=1,2,\ldots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,\ldots) \tag{1.1}$$

При этом пишут

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.2}$$

Поскольку построение ряда (1.2) выполнено формально, то этот ряд может расходиться или сходиться, но сумма его, вообще говоря, может не совпадать с разложенной в него функцией.

2.Сформулируем достаточные условия, при выполнении которых ряд (1.2) имеет сумму, равную заданной функции $f\,(x)$:

Функция $f\,(x)$ может иметь на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ лишь конечное число максимумов и минимумов и должна быть непрерывной, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода.

Эти условия называются условиями Дирихле.

<u>Теорема Дирихле.</u> Если функция $f\,(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, то её ряд Фурье сходится к функции $f\,(x)$ во всех точках, в которых она непрерывна. В точках разрыва функции

ряд сходится к полусумме $\frac{f(c-0)+f(c+0)}{2}$ **её предельных значений слева и справа (***c* **– точка разрыва первого рода). Если** $f(-\pi)\neq f(\pi)$**, то в точках** $\pm\pi$ **ряд сходится к значению** $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$**. При этом сумма ряда** (1.2) **является периодической с периодом** 2π **функцией на всей оси** Ox**.**

3. Пусть теперь функция *f* (*x*) задана на отрезке [–*l*, *l*]. Ряд Фурье в этом случае имеет вид

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}),\qquad (3.1)$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,...),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,...)\qquad (3.2)$$

Вопрос о сходимости ряда (3.1), в свою очередь, определяется теоремой Дирихле, но на отрезке [–*l*, *l*], соответственно. Суммой ряда будет периодическая на всей числовой оси функция с периодом 2*l*.

Замечание: Значок ~ в (1.2) и (3.1) нужно понимать следующим образом: если $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[-\pi,\pi]$ и $[-l,l]$ соответственно, то во всех точках её непрерывности значок ~ надо заменить знаком = и помнить, что в точках разрыва сумма ряда равна полусумме левого и правого пределов $f(x)$ в этих точках, а на концах отрезка – $\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}$ $\left(\frac{f(-l)+f(l)}{2}\right)$, если $f(-\pi)\neq f(\pi)$ $(f(-l)\neq f(l)$ соответственно).

Пример 1. Разложить функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x\le 0,\\ x, & 0<x\le 2\end{cases}$$

в ряд Фурье на интервале (–2, 2).

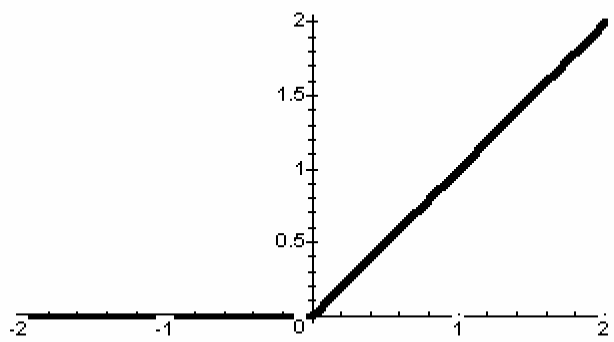


Рис. 1

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2})$. Данная функция непрерывна на отрезке [–2, 2] и не имеет там экстремумов, следовательно, удовлетворяет условиям Дирихле. Вычислим коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{2}x\,dx\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2=1;$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\cdot dx+\int_{0}^{2}x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\cdot dx\right]=\left\{\begin{matrix}u=x,\,du=dx,\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2},\,v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2-\int_0^2\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\cdot dx\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0,\quad n=2k-\textit{чётное}\quad(k=1,2,...),\\ -\frac{4}{n^2\pi^2}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2},\quad n=2k-1-\textit{нечётное};\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\cdot dx+\int_{0}^{2}x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\cdot dx\right]=\left\{\begin{matrix}u=x,\,du=dx,\\ dv=\sin\frac{n\pi x}{2},\,v=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x\cdot\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2+\int_0^2\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\cdot dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-2^2}{n\pi}\cdot\cos n\pi+\frac{2^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2\right)=\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Таким образом, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

В соответствии с теоремой Дирихле, график суммы ряда Фурье для функции $f(x)$ имеет вид

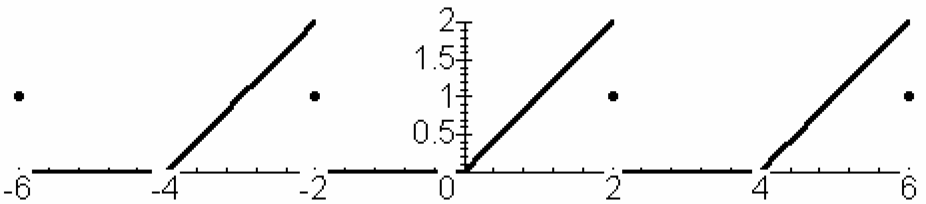


Рис. 2

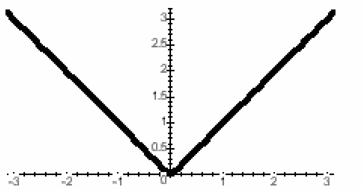
4. Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций.

а) Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$ – чётная и удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда ряд Фурье для этой функции будет содержать только a_0 и члены с косинусами, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{4.1}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad b_n = 0.$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ чётную



функцию $f(x) = |x|$.

Рис. 3

Данная функция непрерывна на заданном отрезке ($l = \pi$) и имеет на нём один экстремум, поэтому удовлетворяет условиям Дирихле.

Ряд (4.1) в данном случае принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Так как $f(x) = |x| = x$ при $0 \le x \le \pi$, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left\{\begin{aligned} &u = x,\ du = dx,\\ &dv = \cos nx\,dx,\ v = \frac{1}{n}\sin nx\end{aligned}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{x}{n}\sin nx\right|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k \text{ – чётное} \quad (k = 1, 2, \ldots),\\ -\dfrac{4}{n^2\pi} = -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \text{ – нечётное.}\end{cases}$$ Следовательно,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - 4\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\pi}\cos(2k-1)x.$$

В соответствии с теоремой Дирихле, график суммы ряда Фурье – периодическая функция с периодом 2π, которая совпадает с $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ (рис. 4).

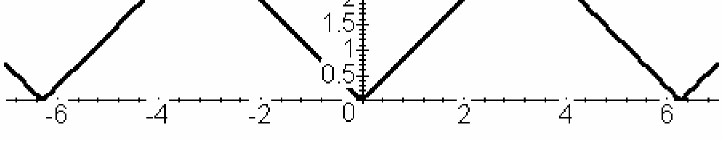


Рис. 4

На рис. 5 изображены графики частичных сумм ряда Фурье $S_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x$, $S_2(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x$, $S_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x - \frac{4}{25\pi}\cos 5x$:

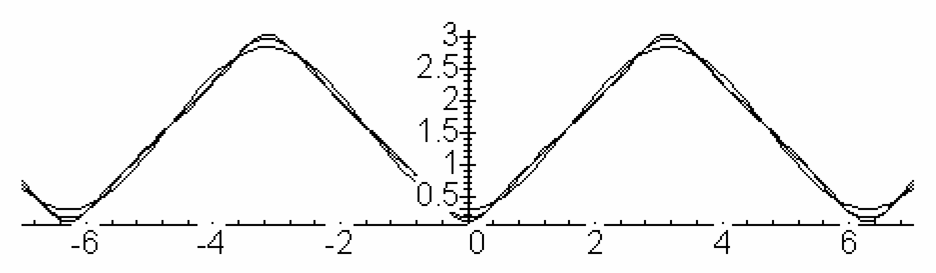


Рис. 5

б) Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$ – нечётная и удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда ряд Фурье для этой функции будет содержать только члены с синусами:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, ...)$.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье на отрезке [–2, 2] нечётную функцию $f(x) = x$.

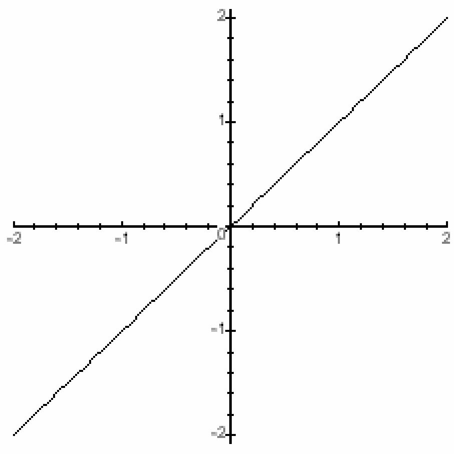


Рис. 6

Эта функция на заданном отрезке удовлетворяет условиям Дирихле, так как непрерывна и не имеет там экстремумов. Ряд Фурье для данной функции имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2},$$

где $b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \left\{\begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx, v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{array}\right\} =$

$= -x\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 =$

$= (-1)^{n+1}\frac{4}{n\pi}$. Таким образом,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

На рис. 7 изображены графики частичных сумм ряда Фурье $S_1(x) =$ $= \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}$, $S_2(x) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{4}{2\pi}\sin\pi x$, $S_3(x) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{4}{2\pi}\sin\pi x +$ $+ \frac{4}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2}$:

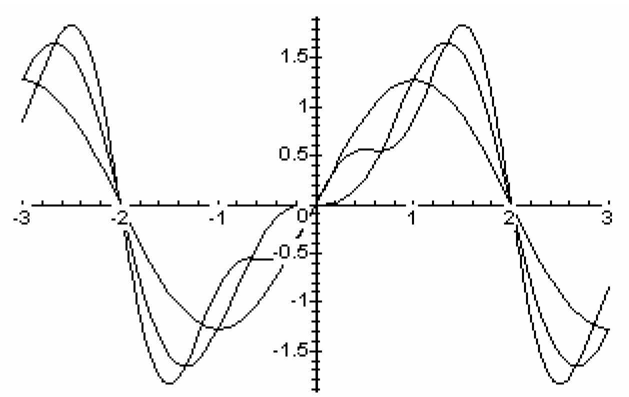


Рис. 7

5. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке [0, *l*].

В этом случае можно доопределить функцию на полуинтервал $[-l, 0)$ либо чётным, либо нечётным образом. В первом случае получится чётная на $[-l, l]$ функция, которая будет раскладываться в ряд Фурье по косинусам, а во втором – нечётная на $[-l, l]$ функция, и её ряд Фурье будет содержать только синусы. В обоих случаях на отрезке $[0, l]$ эти ряды дадут разложение исходной функции в ряд Фурье.

Пример 4. Разложить функцию $f(x) = x$, заданную на отрезке $[0, \pi]$, доопределив её чётным образом на полуинтервал $[-\pi, 0)$.

В результате получим чётную функцию $\varphi(x)$; для $x < 0$ будет $\varphi(x) =$ $= \varphi(-x) = f(-x) = -x$, следовательно, $\varphi(x) = |x|$ на $[-\pi, \pi]$. Разложение этой функции было сделано в примере 2, и оно одновременно является разложением $f(x) = x$ на отрезке $[0, \pi]$.

Пример 5. Разложить функцию $f(x) = x + 1$, заданную на отрезке $[0, 2]$, в ряд Фурье, продолжив её нечётным образом на полуинтервал $[-2,0)$

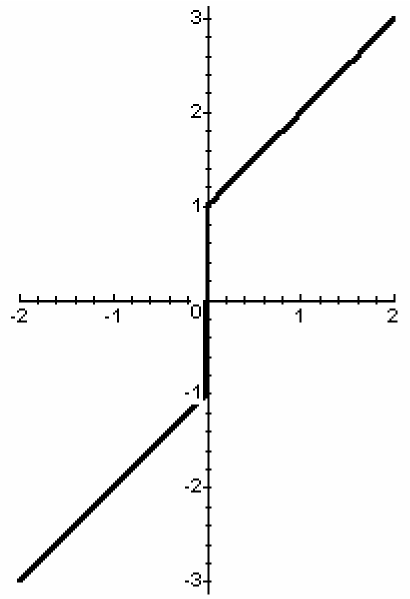


Рис. 8

В результате получим нечётную функцию $\varphi(x)$; для $x < 0$ будет $\varphi(x) = -\varphi(-x) = -f(-x) = x - 1$, следовательно, $\varphi(x) = \begin{cases} x-1, & -2 \le x < 0, \\ x+1, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$ Эта функция непрерывна на [–2, 2] за исключением точки $x = 0$, в которой она имеет разрыв первого рода, т. е. удовлетворяет условиям Дирихле:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2},$$

где $b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 (x+1)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x+1, du = dx, \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx, v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{matrix}\right\} =$

$$-(x+1)\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[-3\cos n\pi + 1\right] + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2$$

$= \frac{2}{n\pi}\left[1 - 3\cdot(-1)^n\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+3\cdot(-1)^{n+1}}{n}$. Таким образом,

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

В этот ряд одновременно разложена заданная на [0, 2] функция $f(x) = x + 1$.

Замечание: Можно также разложить $f(x)$ и на отрезке $[0, l]$, но тогда в разложение войдут члены ряда и с синусами, и с косинусами, а сумма ряда будет периодической функцией с периодом $T = l$.