Ряды Фурье.

(Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830) – французский математик)

Тригонометрический ряд.

Определение. Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

или, короче, $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Действительные числа a_i, b_i называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если ряд представленного выше типа сходится, то его сумма представляет собой периодическую функцию с периодом 2π, т.к. функции $\sin nx$ и $\cos nx$ также периодические функции с периодом 2π.

Пусть тригонометрический ряд равномерно сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, а следовательно, и на любом отрезке в силу периодичности, и его сумма равна $f(x)$.

Определим коэффициенты этого ряда.

Для решения этой задачи воспользуемся следующими равенствами:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m = 0,1,2,.. \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1,2,... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1,2,... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \quad m = 0,1,2,..., \quad n = 1,2,...$$

Справедливость этих равенств вытекает из применения к подынтегральному выражению тригонометрических формул.

Т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$, то существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx = \pi a_0$$

Такой результат получается в результате того, что $\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx = 0$.

Получаем: $\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}$

Далее умножаем выражение разложения функции в ряд на $\cos nx$ и интегрируем в пределах от $-\pi$ до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos^2 nx + b_n \cos nx \sin nx) dx = \pi a_n$$

Отсюда получаем: $\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad n = 1,2,...}$

Аналогично умножаем выражение разложения функции в ряд на sinnx и интегрируем в пределах от $-\pi$ до π.

Получаем: $\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,...}$

Выражение для коэффициента a_0 является частным случаем для выражения коэффициентов a_n.

Таким образом, если функция *f(x)* – любая периодическая функция периода 2π, непрерывная на отрезке $[-\pi; \pi]$ или имеющая на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, то коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \quad n = 0,1,2,...$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \quad n = 1,2,...$$

существуют и называются **коэффициентами Фурье** для функции *f(x)*.

Определение. **Рядом Фурье** для функции *f(x)* называется тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье. Если ряд Фурье функции *f(x)* сходится к ней во всех ее точках непрерывности, то говорят, что функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье.

Достаточные признаки разложимости в ряд Фурье.

Теорема. (Теорема Дирихле) *Если функция f(x) имеет период 2π и на отрезке $[-\pi;\pi]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок $[-\pi;\pi]$ можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция f(x) монотонна, то ряд Фурье для функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции f(x) его сумма равна f(x), а в точках разрыва его сумма равна* $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$*, т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция f(x), для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется **кусочно – монотонной** на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Теорема. *Если функция f(x) имеет период 2π, кроме того, f(x) и ее производная f'(x) – непрерывные функции на отрезке $[-\pi;\pi]$ или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности его сумма равна f(x), а в точках разрыва она равна*

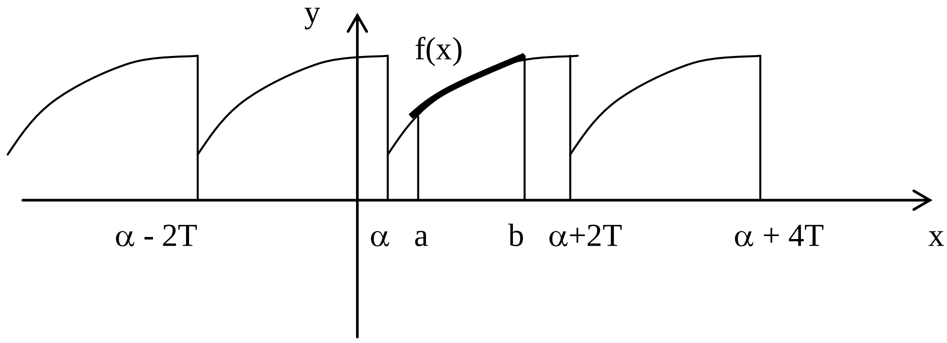
$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. *При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).*

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется **кусочно – гладкой** на отрезке [-π;π].

Разложение в ряд Фурье непериодической функции.

Задача разложения непериодической функции в ряд Фурье в принципе не отличается от разложения в ряд Фурье периодической функции.

Допустим, функция *f(x)* задана на отрезке [a, b] и является на этом отрезке кусочно – монотонной. Рассмотрим произвольную периодическую кусочно – монотонную функцию $f_1(x)$ с периодом $2T \geq |b-a|$, совпадающую с функцией f(x) на отрезке [a, b].



Таким образом, функция *f(x)* была дополнена. Теперь функция $f_1(x)$ разлагается в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка [a, b] совпадает с функцией *f(x),* т.е. можно считать, что функция *f(x)* разложена в ряд Фурье на отрезке [a, b].

Таким образом, если функция f(x) задана на отрезке, равном 2π ничем не отличается от разложения в ряд периодической функции. Если же отрезок, на котором задана функция, меньше, чем 2π, то функция продолжается на интервал (b, a + 2π) так, что условия разложимости в ряд Фурье сохранялись.

Вообще говоря, в этом случае продолжение заданной функции на отрезок (интервал) длиной 2π может быть произведено бесконечным количеством способов, поэтому суммы получившихся рядов будут различны, но они будут совпадать с заданной функцией f(x) на отрезке [a,b].

Ряд Фурье для четных и нечетных функций.

Отметим следующие свойства четных и нечетных функций:

1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0, & f(x) - \text{нечетная} \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(x) - \text{четная} \end{cases}$

2) Произведение двух четных и нечетных функций является четной функцией.

3) Произведение четной и нечетной функций – нечетная функция.

Справедливость этих свойств может быть легко доказана исходя из определения четности и нечетности функций.

Если f(x) – четная периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье, то можно записать:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0; \qquad (n = 1,2,...)$$

Таким образом, для четной функции ряд Фурье записывается:

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n = 0,1,2,...) \end{gathered}}$$

Аналогично получаем разложение в ряд Фурье для нечетной функции:

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx; \\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n = 1,2,...) \end{gathered}}$$

<u>Пример.</u> Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = x^3$ с периодом T = 2π на отрезке [-π;π].

Заданная функция является нечетной, следовательно, коэффициенты Фурье ищем в виде:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx; \qquad (n = 1,2,...)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^3 \sin nx dx = \left\{ \begin{aligned} &u = x^3; \quad dv = \sin nx dx; \\ &du = 3x^2 dx; \quad v = -\frac{\cos nx}{n}; \end{aligned} \right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^3 \cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx dx \right) =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &u = x^2; \quad dv = \cos nx dx; \\ &du = 2x dx; \quad v = \frac{\sin nx}{n}; \end{aligned} \right\} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\frac{x^2 \sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{2x \sin nx}{n} dx \right] \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3 \cos \pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_{0}^{\pi} x \sin nx dx \right) = \left\{ \begin{aligned} &u = x; \quad dv = \sin nx dx; \\ &du = dx; \quad v = -\frac{\cos nx}{n}; \end{aligned} \right\} =$$

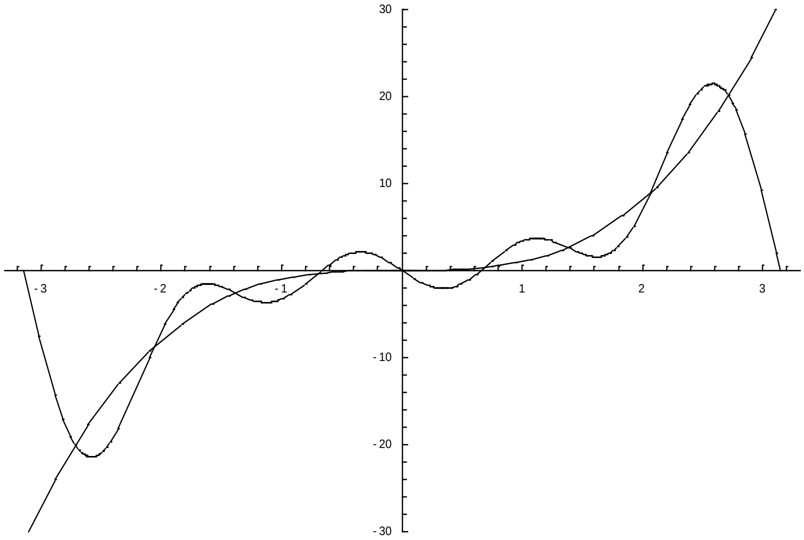
$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}-\frac{6}{n^2}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n}+\frac{6\pi\cos\pi}{n^3}-\frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right)\right)=-\frac{2\pi^2\cos\pi n}{n}+\frac{12\cos\pi n}{n^3}=(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)$$

Получаем:

$$\boxed{x^3=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx\,.}$$

Построим графики заданной функции и ее разложения в ряд Фурье, ограничившись первыми четырьмя членами ряда.



Ряды Фурье для функций любого периода.

Ряд Фурье для функции *f(x)* периода $T = 2l$, непрерывной или имеющей конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [$-l$, l] имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx,\quad n=1,2,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx,\quad n=1,2,\ldots$$

Для четной функции произвольного периода разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n}{l}x;$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,...$$

Для нечетной функции:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x;$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx; \quad n = 1,2,...$$

Ряд Фурье по ортогональной системе функций.

Определение. Функции φ(x) и ψ(x), определенные на отрезке [a, b], называются **ортогональными** на этом отрезке, если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$$

Определение. Последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, φn(x), непрерывных на отрезке [a, b], называется **ортогональной системой функций** на этом отрезке, если все функции попарно ортогональны.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0; \qquad i \neq j$$

Отметим, что ортогональность функций не подразумевает перпендикулярности графиков этих функций.

Определение. Система функций называется **ортогональной и нормированной (ортонормированной)**, если

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Определение. Рядом Фурье по ортогональной системе функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …,φn(x) называется ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

коэффициенты которого определяются по формуле:

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx},$$

где *f(x)* = $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ - сумма равномерно сходящегося на отрезке [a, b] ряда по ортогональной системе функций. *f(x)* – любая функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [a, b].

В случае ортонормированной системы функций коэффициенты определяются:

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$$

Интеграл Фурье.

Пусть функция *f(x)* на каждом отрезке [-*l*,*l*], где *l* – любое число, кусочно – гладкая или кусочно – монотонная, кроме того, *f(x)* – абсолютно интегрируемая функция, т.е. сходится несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

Тогда функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}tdt, \quad n = 0,1,2,...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}tdt, \quad n = 1,2,...$$

Если подставить коэффициенты в формулу для f(x), получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}tdt\cos\frac{\pi n}{l}x + \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}tdt\sin\frac{\pi n}{l}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, можно доказать, что $\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt = 0$ и

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt$$

Обозначим $u_n = \frac{\pi n}{l}$; $\quad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l}$; $\qquad \frac{1}{l} = \frac{\Delta u_n}{\pi}$;

При $l \to \infty$ $\Delta u_n \to 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n \int_{-l}^{l} f(t) \cos u_n (t - x) dt$$

Можно доказать, что предел суммы, стоящий в правой части равенства равен интегралу

$$\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t - x) dt$$

Тогда $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t - x) dt$ - **двойной интеграл Фурье.**

Окончательно получаем:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} [a(u) \cos ux + b(u) \sin ux] du \\ a(u) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt \\ b(u) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt \end{aligned}}$$

- представление функции f(x) **интегралом Фурье**.

Двойной интеграл Фурье для функции f(x) можно представить в комплексной форме:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iu(x-t)} dt}$$

Преобразование Фурье.

Определение. Если *f(x)* – любая абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на каждом отрезке, то функция

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$$

называется **преобразованием Фурье функции *f(x)*.**

Функция *F(u)* называется также **спектральной характеристикой функции *f(x)*.**

Если f(x) – функция, представимая интегралом Фурье, то можно записать:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du$$

Это равенство называется **обратным преобразованием Фурье**

Интегралы $F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(x)\cos uxdx$ и $F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(x)\sin uxdx$ называются соответственно **косинус - преобразование Фурье и синус – преобразование Фурье.**

Косинус – преобразование Фурье будет преобразованием Фурье для четных функций, синус – преобразование – для нечетных.

Преобразование Фурье применяется в функциональном анализе, гармоническом анализе, операционном исчислении, теории линейных систем и др.