Ряды.

Основные определения.

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа $u_1, u_2, ...$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, ...$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частичных сумм ряда $S_1, S_2, ..., S_n, ...$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где С – постоянное число.

Теорема. *Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum Cu_n$ тоже сходится, и его сумма равна CS. ($C \neq 0$)*

3) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

Теорема. *Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна S + σ.*

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.
Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.
О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

При изучении рядов решают в основном две задачи: исследование на сходимость и нахождение суммы ряда.

Критерий Коши.

(необходимые и достаточные условия сходимости ряда)

Для того, чтобы последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер N, что при n > N и любом p > 0, где p – целое число, выполнялось бы неравенство:*

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon .$$

Сформулируем критерий Коши для ряда.

Для того, чтобы ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *был сходящимся необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал номер N такой, что при n>N и любом p>0 выполнялось бы неравенство*

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon .$$

Однако, на практике использовать непосредственно критерий Коши не очень удобно. Поэтому как правило используются более простые признаки сходимости:

1) Если ряд $\sum u_n$ сходится, то необходимо, чтобы общий член u_n стремился к нулю. Однако, это условие не является достаточным. Можно говорить только о том, что если общий член не стремится к нулю, то ряд точно расходится. Например, так называемый гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся, хотя его общий член и стремится к нулю.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{3n-1} + \ldots$

Найдем $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$ - необходимый признак сходимости не выполняется, значит ряд расходится.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.
Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+\ldots$ расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при четных } n \\ 1, & \text{при нечетных } n \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n| < 2$ при любом n.

Ряды с неотрицательными членами.

При изучении знакопостоянных рядов ограничимся рассмотрением рядов с неотрицательными членами, т.к. при простом умножении на –1 из этих рядов можно получить ряды с отрицательными членами.

Теорема. *Для сходимости ряда $\sum u_n$ с неотрицательными членами необходимо и достаточно, чтобы частные суммы ряда были ограничены.*

Признак сравнения рядов с неотрицательными членами.

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ при $u_n, v_n \geq 0$.

Теорема. Если $u_n \leq v_n$ при любом n, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\ldots$

Т.к. $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, а гармонический ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится, то расходится и ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Т.к. $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum \frac{1}{2^n}$ сходится (как убывающая геометрическая прогрессия), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ тоже сходится.

Также используется следующий признак сходимости:

Теорема. *Если $u_n > 0$, $v_n > 0$ и существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.*

Признак Даламбера.
(Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик)

Если для ряда $\sum u_n$ с положительными членами существует такое число $q<1$, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q,$$

то ряд $\sum u_n$ сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется условие

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$

то ряд $\sum u_n$ расходится.

Предельный признак Даламбера.

Предельный признак Даламбера является следствием из приведенного выше признака Даламбера.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, *то при ρ < 1 ряд сходится, а при ρ > 1 – расходится. Если ρ = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.*

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

$$u_n=\frac{n}{2^n};\quad u_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}};\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

$$u_n=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!};\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Признак Коши. (радикальный признак)</u>

Если для ряда $\sum u_n$ *с неотрицательными членами существует такое число q<1, что для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\le q,$$

то ряд $\sum u_n$ *сходится, если же для всех достаточно больших n выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{u_n}\ge 1,$$

то ряд $\sum u_n$ *расходится.*

<u>Следствие.</u> Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$, то при ρ<1 ряд сходится, а при ρ>1 ряд расходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Вывод: ряд сходится.

<u>Пример.</u> Определить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши.

Если $\varphi(x)$ – непрерывная положительная функция, убывающая на промежутке $[1;\infty)$, *то ряд $\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\varphi(x)dx$ одинаковы в смысле сходимости.*

Пример. Ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\le1$ т.к. соответствующий несобственный интеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится $\alpha\le1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ называется **общегармоническим** рядом.

Следствие. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – непрерывные функции на интервале (a, b] и $\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = h, \quad h\neq 0,$ то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Знакопеременные ряды.

Знакочередующиеся ряды.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots$$

где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots$ абсолютные величины u_i убывают $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ и общий член стремится к нулю $u_n \to 0$, то ряд сходится.

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{2}$$

<u>Теорема.</u> *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

<u>Определение.</u> Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

<u>Определение.</u> Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

<u>Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.</u>

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

<u>Признак Даламбера.</u> Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ=1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

<u>Признак Коши.</u> Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ=1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

<u>Свойства абсолютно сходящихся рядов.</u>

1) **<u>Теорема.</u>** *Для абсолютной сходимости ряда $\sum u_n$ необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

<u>Следствие.</u> Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда*.

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно *S* и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i,k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.

Функциональные последовательности.

Определение. Если членами ряда будут не числа, а функции от *x*, то ряд называется **функциональным**.

Исследование на сходимость функциональных рядов сложнее исследования числовых рядов. Один и тот же функциональный ряд может при одних значениях переменной *x* сходиться, а при других – расходиться. Поэтому вопрос сходимости функциональных рядов сводится к определению тех значений переменной *x*, при которых ряд сходится.

Совокупность таких значений называется **областью сходимости**.

Так как пределом каждой функции, входящей в область сходимости ряда, является некоторое число, то пределом функциональной последовательности будет являться некоторая функция:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится** к функции *f(x)* на отрезке [a,b], если для любого числа ε>0 и любой точки *x* из рассматриваемого отрезка существует номер N = N(ε, x), такой, что неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

выполняется при n>N.

При выбранном значении ε>0 каждой точке отрезка [a,b] соответствует свой номер и, следовательно, номеров, соответствующих всем точкам отрезка [a,b], будет бесчисленное множество. Если выбрать из всех этих номеров наибольший, то этот номер будет годиться для всех точек отрезка [a,b], т.е. будет общим для всех точек.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ **равномерно сходится** к функции *f(x)* на отрезке [a,b], если для любого числа ε>0 существует номер N = N(ε), такой, что неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

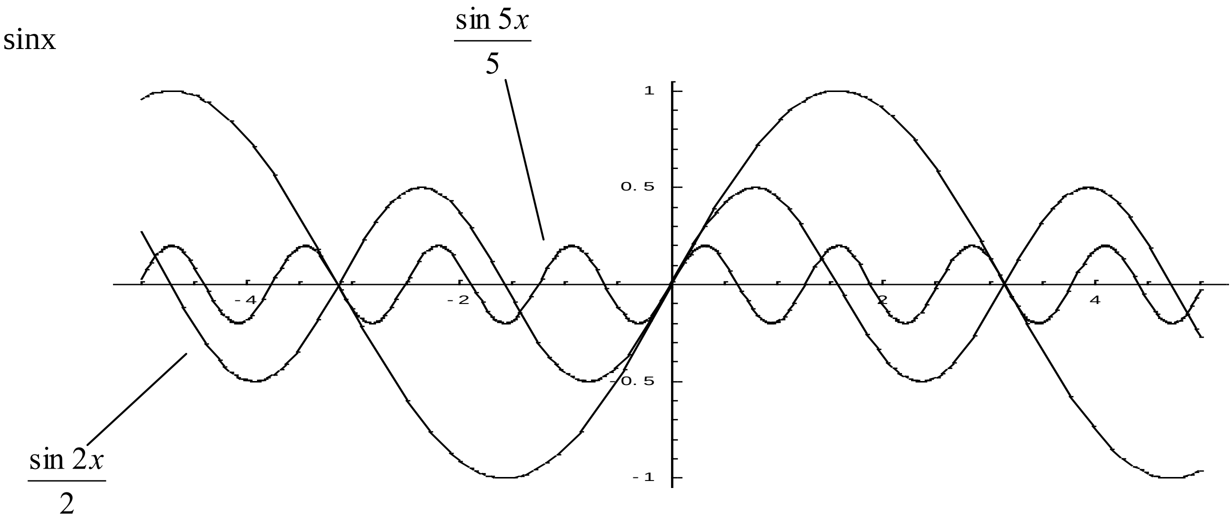
выполняется при n>N для всех точек отрезка [a,b].

Пример. Рассмотрим последовательность $\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin 2x}{2}, ..., \frac{\sin nx}{n}, ...$

Данная последовательность сходится на всей числовой оси к функции *f(x)=0*, т.к.

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sin nx}{n}=0,\quad -\infty<x<\infty$$

Построим графики этой последовательности:



Как видно, при увеличении числа *n* график последовательности приближается к оси *x*.

<u>Функциональные ряды.</u>

<u>**Определение.**</u> **Частными (частичными) суммами** функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называются функции $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad n=1,2,\ldots$

<u>**Определение.**</u> Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке ($x=x_0$), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ в точке x_0.

<u>**Определение.**</u> Совокупность всех значений *x*, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

<u>**Определение.**</u> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a,b], если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

<u>**Теорема.**</u> (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого числа ε>0 существовал такой номер N(ε), что при n>N и любом целом p>0 неравенство*

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+p}(x)\right|<\varepsilon$$

выполнялось бы для всех x на отрезке [a,b].

<u>Теорема.</u> (Признак равномерной сходимости Вейерштрасса)
(Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно и притом абсолютно на отрезке [a,b], если модули его членов на том же отрезке не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами :*

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots$$

т.е. имеет место неравенство:

$$|u_n(x)| \le M_n .$$

Еще говорят, что в этом случае функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **мажорируется** числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{M}_n$.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Так как $|\cos nx| \le 1$ всегда, то очевидно, что $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$.

При этом известно, что общегармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha=3>1$ сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд равномерно сходится и притом в любом интервале.

<u>Пример.</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

На отрезке [-1,1] выполняется неравенство $\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ т.е. по признаку Вейерштрасса на этом отрезке исследуемый ряд сходится, а на интервалах $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ расходится.

<u>Свойства равномерно сходящихся рядов.</u>

1) Теорема о непрерывности суммы ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *- непрерывные на отрезке [a,b] функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма S(x) есть непрерывная функция на отрезке [a,b].*

2) Теорема о почленном интегрировании ряда.

Равномерно сходящийся на отрезке [a,b] ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку [a,b] , сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}u_n(x)dx;\quad \alpha,\beta\in[a,b]$$

3) Теорема о почленном дифференцировании ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *сходящегося на отрезке [a,b] представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ *сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}$$

На основе того, что сумма ряда является некоторой функцией от переменной *x*, можно производить операцию представления какой – либо функции в виде ряда (разложения функции в ряд), что имеет широкое применение при интегрировании, дифференцировании и других действиях с функциями.

На практике часто применяется разложение функций в степенной ряд.

Степенные ряды.

Определение. Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ .$$

Для исследования на сходимость степенных рядов удобно использовать признак Даламбера.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right|=|x|\,.$$

Получаем, что этот ряд сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$.

Теперь определим сходимость в граничных точках 1 и –1.

При x = -1: $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$ ряд сходится по признаку Лейбница При x = 1: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ ряд расходится (гармонический ряд).

Теоремы Абеля.

(Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Теорема. *Если степенной ряд* $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *сходится при* $x=x_1$*, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x|<|x_1|$.

<u>Следствие.</u> Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. При этом число R называется **радиусом сходимости**. Интервал (-R, R) называется **интервалом сходимости**.

Отметим, что этот интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Радиус сходимости может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$$

<u>Пример.</u> Найти область сходимости ряда $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

Находим радиус сходимости $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n-1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}|n| = |\infty|$.

Следовательно, данный ряд сходится при любом значении x. Общий член этого ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0.$$

<u>Теорема.</u> Если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится для положительного значения $x=x_1$, то он сходится равномерно в любом промежутке внутри $(-|x_1|; |x_1|)$.

<u>Действия со степенными рядами.</u>

1) Интегрирование степенных рядов.

Если некоторая функция $f(x)$ определяется степенным рядом: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то интеграл от этой функции можно записать в виде ряда:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C}$$

2) Дифференцирование степенных рядов.

Производная функции, которая определяется степенным рядом, находится по формуле:

$$\boxed{f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}}$$

3) Сложение, вычитание, умножение и деление степенных рядов.

Сложение и вычитание степенных рядов сводится к соответствующим операциям с их членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

Произведение двух степенных рядов выражается формулой:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Коэффициенты c_i находятся по формуле:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Деление двух степенных рядов выражается формулой:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Для определения коэффициентов q_n рассматриваем произведение $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, полученное из записанного выше равенства и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 b_0 \\ a_1 = q_0 b_1 + q_1 b_0 \\ a_2 = q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = q_0 b_n + q_1 b_{n-1} + \ldots + q_n b_0 \end{cases}$$

Разложение функций в степенные ряды.

Разложение функций в степенной ряд имеет большое значение для решения различных задач исследования функций, дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений, вычисления пределов, вычисления приближенных значений функции.

Возможны различные способы разложения функции в степенной ряд. Такие способы как разложение при помощи рядов Тейлора и Маклорена были рассмотрены ранее. Существует также способ разложения в степенной ряд **при помощи алгебраического деления.** Это – самый простой способ разложения, однако, пригоден он только для разложения в ряд алгебраических дробей.

Пример. Разложить в ряд функцию $\frac{1}{1-x}$.

Суть метода алгебраического деления состоит в применении общего правила деления многочленов:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,1 & 1 - x \\ \cline{2-2}
\underline{1 - x} & 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \\
-\,x & \\
\underline{x - x^2} & \\
-\,x^2 & \\
\underline{x^2 - x^3} & \\
x^3 & \\
\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Если применить к той же функции формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

то получаем: $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$; $\quad f'(0) = 1$;

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}; \quad f''(0) = 2;$$

$$f'''(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}; \quad f'''(0) = 3!;$$

……………………………….

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}; \quad f^{(n)}(0) = n!;$$

Итого, получаем: $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

Рассмотрим способ разложения функции в ряд **при помощи интегрирования.**

С помощью интегрирования можно разлагать в ряд такую функцию, для которой известно или может быть легко найдено разложение в ряд ее производной.

Находим дифференциал функции $df(x) = f'(x)dx$ и интегрируем его в пределах от 0 до x.

$$\int_0^x df(x) = \int_0^x f'(x)dx; \qquad f(x)\Big|_0^x = \int_0^x f'(x)dx;$$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(x)dx;$$

Пример. Разложить в ряд функцию $f(x) = \ln(1+x)$.

Разложение в ряд этой функции по формуле Маклорена было рассмотрено выше.

Теперь решим эту задачу при помощи интегрирования.

При $f(0) = 0$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ получаем по приведенной выше формуле:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx$$

Разложение в ряд функции $\frac{1}{1+x}$ может быть легко найдено способом алгебраического деления аналогично рассмотренному выше примеру.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$$

Тогда получаем: $\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1+x}dx = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x (-1)^n x^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Окончательно получим: $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots}$

<u>Пример.</u> Разложить в степенной ряд функцию $arctgx$.

Применим разложение в ряд с помощью интегрирования.

$$f(x) = arctgx; \quad f(0) = 0; \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$arctgx = \int\limits_0^x \frac{1}{1+x^2}dx$$

Подинтегральная функция может быть разложена в ряд методом алгебраического деления:

$$\begin{array}{l|l}
-\,1 & 1 + x^2 \\
\underline{\ 1 + x^2\ } & \overline{1 - x^2 + x^4 - \ldots} \\
\quad -\ -x^2 & \\
\quad \underline{\ -x^2 - x^4\ } & \\
\qquad\quad -\ x^4 & \\
\qquad\quad \underline{\ x^4 + x^6\ } & \\
\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

Тогда $arctgx = \int\limits_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x (-1)^n x^{2n} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Окончательно получаем: $\boxed{arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots}$

<u>Решение дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.</u>

С помощью степенных рядов возможно интегрировать дифференциальные уравнения.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$$

Если все коэффициенты и правая часть этого уравнения разлагаются в сходящиеся в некотором интервале степенные ряды, то существует решение этого уравнения в некоторой малой окрестности нулевой точки, удовлетворяющее начальным условиям.

Это решение можно представить степенным рядом:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

Для нахождения решения остается определить неизвестные постоянные c_i.

Эта задача решается **методом сравнения неопределенных коэффициентов**. Записанное выражение для искомой функции подставляем в исходное дифференциальное уравнение, выполняя при этом все необходимые действия со степенными рядами (дифференцирование, сложение, вычитание, умножение и пр.)

Затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения. В результате с учетом начальных условий получим систему уравнений, из которой последовательно определяем коэффициенты c_i.

Отметим, что этот метод применим и к нелинейным дифференциальным уравнениям.

<u>Пример.</u> Найти решение уравнения $y'' - xy = 0$ с начальными условиями *y(0)=1, y'(0)=0.*

Решение уравнения будем искать в виде $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots$$

Подставляем полученные выражения в исходное уравнение:

$$(2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + \ldots) - (c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \ldots) = 0$$

$$2c_2 + x(6c_3 - c_0) + x^2(12c_4 - c_1) + x^3(20c_5 - c_2) + x^4(30c_6 - c_3) + \ldots = 0$$

Отсюда получаем: $2c_2 = 0$

$$6c_3 - c_0 = 0$$

$$12c_4 - c_1 = 0$$

$$20c_5 - c_2 = 0$$

$$30c_6 - c_3 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Получаем, подставив начальные условия в выражения для искомой функции и ее первой производной:

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 0$$

Окончательно получим: $c_0 = 1; \quad c_1 = 0; \quad c_2 = 0; \quad c_3 = \frac{1}{6}; \quad c_4 = 0; \quad c_5 = 0; \quad c_6 = \frac{1}{180}; \quad \ldots$

Итого: $\boxed{y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots}$

Существует и другой метод решения дифференциальных уравнений с помощью рядов. Он носит название **метод последовательного дифференцирования.**

Рассмотрим тот же пример. Решение дифференциального уравнения будем искать в виде разложения неизвестной функции в ряд Маклорена.

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Если заданные начальные условия *y(0)=1*, *y'(0)=0* подставить в исходное дифференциальное уравнение, получим, что $y''(0) = 0$.

Далее запишем дифференциальное уравнение в виде $y'' = xy$ и будем последовательно дифференцировать его по *x*.

$$y''' = y + xy'; \qquad y'''(0) = y(0) = 1;$$

$$y^{IV} = y' + y' + xy''; \quad y^{IV}(0) = 0;$$

$$y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''; \quad y^{V}(0) = 0;$$

$$y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}; \quad y^{VI}(0) = 4;$$

....

После подстановки полученных значений получаем:

$$\boxed{y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots}$$