Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Решение различных геометрических, физических и инженерных задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту ил иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение *a* является производной по времени *t* от скорости *V*, которая также является производной по времени *t* от перемещения *S*. Т.е.

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тогда получаем: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t)\cdot t}{2}$ - уравнение связывает функцию f(t) с независимой переменной t и производной второго порядка функции f(t).

<u>Определение.</u> **Дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

<u>Определение.</u> Если дифференциальное уравнение имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое дифференциальное уравнение называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

<u>Определение.</u> Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

<u>Пример.</u>

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 1 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\frac{d^2y}{dx^2} + xy\frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение 2 – го порядка. В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка.

<u>Определение.</u> **Общим решением** дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y = φ(x, C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Свойства общего решения.

1) Т.к. постоянная С – произвольная величина, то вообще говоря дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений.

2) При каких- либо начальных условиях $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ существует такое значение $C = C_0$, при котором решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x, C_0)$.

Определение. Решение вида $y = \varphi(x, C_0)$ называется **частным решением** дифференциального уравнения.

Определение. **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коши. (теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1- го порядка)

Если функция f(x, y) непрерывна в некоторой области D в плоскости XOY и имеет в этой области непрерывную частную производную $y' = f(x, y)$, то какова бы не была точка (x_0, y_0) в области D, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, определенное в некотором интервале, содержащем точку x_0, принимающее при $x = x_0$ значение $\varphi(x_0) = y_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

Определение. **Интегралом** дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

Общее решение дифференциального уравнения ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$xdy = -ydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем: $$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + C_0$$

$$\ln y + \ln x = C_0$$

$$\ln xy = C_0$$

$$xy = e^{C_0} = C$$

$y = \dfrac{C}{x}$ - это общее решение исходного дифференциального уравнения.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тогда имеем

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

$$y = \frac{2}{x}$$

<u>Определение.</u> Интегральной кривой называется график y = φ(x) решения дифференциального уравнения на плоскости XOY.

<u>Определение.</u> Особым решением дифференциального уравнения называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной С.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной С. Если построить семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое дифференциальное уравнение имеет особые решения.

<u>Пример.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$. Найти особое решение, если оно существует.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln y = -x + C$$

$$y = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Данное дифференциальное уравнение имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^C \neq 0$.

Далее рассмотрим подробнее приемы и методы, которые используются при решении дифференциальных уравнений различных типов.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение. **Дифференциальным уравнением первого порядка** называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если такое соотношение преобразовать к виду $y' = f(x, y)$ то это дифференциальное уравнение первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Преобразуем такое выражение далее:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad dy = f(x, y)dx; \quad f(x, y)dx - dy = 0;$$

Функцию f(x,y) представим в виде: $f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad Q(x, y) \neq 0;$ тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

- это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

Далее рассмотрим подробнее типы уравнений первого порядка и методы их решения.

Уравнения вида *y' = f(x).*

Пусть функция f(x) – определена и непрерывна на некотором интервале
a < x < b. В таком случае все решения данного дифференциального уравнения находятся как $y = \int f(x)dx + C$. Если заданы начальные условия x_0 и y_0, то можно определить постоянную C.

Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Такое уравнение можно представить также в виде:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \; при \; \beta(y) \neq 0;$$

Перейдем к новым обозначениям $\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y);$

Получаем: $$X(x)dx + Y(y)dy = 0;$$

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$
$$y\cos y dy = -2x dx$$
$$\int y\cos y dy = -2\int x dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям

$$\int y\cos y dy = \begin{Bmatrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{Bmatrix} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$
$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения.**

Чтобы проверить правильность полученного ответа продифференцируем его по переменной х.

$$y'\sin y + yy'\cos y - y'\sin y + 2x = 0$$
$$yy' = -\frac{2x}{\cos y} \text{ - верно}$$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии у(2) = 1.

$$\frac{ydx}{dy} = \ln y$$
$$dx = \frac{\ln y dy}{y}$$
$$\int dx = \int \frac{\ln y dy}{y}$$
$$x + C = \int \ln y d(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

при y(2) = 1 получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2;$

Итого: $2(x-2) = \ln^2 y;$ или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

Проверка: $y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \frac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$, итого

$$\frac{y}{y'} = \frac{e^{\pm\sqrt{2x-4}}(\pm\sqrt{2x-4})}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}} = \pm\sqrt{2x-4} = \ln y \text{ - верно.}$$

Пример. Решить уравнение $y' = y^{2/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$$

$$y^{-2/3}dy = dx$$

$$\int y^{-2/3}dy = \int dx$$

$$3y^{1/3} = x + C$$

$$27y = (x+C)^3 \text{ - общий интеграл}$$

$$y = \frac{1}{27}(x+C)^3 \text{ - общее решение}$$

Пример. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx; \qquad \int\frac{dy}{y^2+1} = \int dx;$$

$$arctgy = \frac{x^2}{2} + C; \qquad y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

Пример. Решить уравнение $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$ при условии y(1) = 0.

$$\frac{ydy}{dx} + xe^y = 0$$

$$ydy + xe^y dx = 0; \qquad \frac{y}{e^y}dy = -xdx;$$

$$\int\frac{y}{e^y}dy = -\int xdx;$$

Интеграл, стоящий в левой части будем брать по частям .

$$\int ye^{-y}dy = \left\{\begin{matrix} u = y; & e^{-y}dy = dv; \\ du = dy; & v = -e^y; \end{matrix}\right\} = -e^y y - \int -e^y dy = -e^{-y}y - e^{-y} = -e^{-y}(y+1);$$

$$e^{-y}(y+1)=\frac{x^2}{2}+C_0;$$
$$2e^{-y}(y+1)=x^2+C$$

Если y(1) = 0, то $2e^0(0+1)=1+C; \quad \Rightarrow \quad 2=1+C; \quad \Rightarrow \quad C=1;$

Итого, частный интеграл: $2e^{-y}(y+1)=x^2+1$.

Пример. Решить уравнение $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$.

$$y'+\sin(x+y)-\sin(x-y)=0$$

$$y'-2\sin\frac{x-y-x-y}{2}\cos\frac{x-y+x+y}{2}=0$$
$$y'-2\sin(-y)\cos x=0$$
$$y'+2\sin y\cos x=0$$
$$\frac{dy}{\sin y}=-2\cos x dx; \qquad \int\frac{dy}{\sin y}=-2\int\cos x dx;$$

Получаем общий интеграл:

$$\ln\left|tg\frac{y}{2}\right|=-2\sin x+C$$

Пример. Решить уравнение $2xe^{-x^2}+\frac{y'}{y}=0$

Преобразуем заданное уравнение:

$$2xe^{-x^2}+\frac{dy}{ydx}=0$$
$$2xe^{-x^2}dx+\frac{dy}{y}=0$$
$$\int 2xe^{-x^2}dx+\int\frac{dy}{y}=C$$
$$-e^{-x^2}+\ln|y|=C$$

Получили общий интеграл данного дифференциального уравнения. Если из этого соотношения выразить искомую функцию y, то получим общее решение.

Пример. Решить уравнение $y'=x(y^2+1)$.

$$\frac{dy}{dx}=x(y^2+1)$$

$$\frac{dy}{y^2+1}=xdx$$

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int x dx; \qquad arctgy = \frac{x^2}{2} + C;$$

$$y = tg\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Допустим, заданы некоторые начальные условия x_0 и y_0. Тогда:

$$arctgy_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \quad \Rightarrow \quad C_0 = arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Получаем частное решение $y = tg\left(\frac{x^2}{2} + arctgy_0 - \frac{x_0^2}{2}\right)$.

Однородные уравнения.

Определение. Функция f(x, y) называется **однородной n – го измерения** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Пример. Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3(x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y)$$

Таким образом, функция f(x, y) является однородной 3- го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть f(x, y) есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.
Т.к. функция f(x, y) – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Т.к. параметр t вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \frac{1}{x}$. Получаем:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, т.е.

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде:

$$y' = \varphi(u)$$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$$u'x + ux' = \varphi(u); \quad u'x + u = \varphi(u); \quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x};$$

таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

Введем вспомогательную функцию *u*.

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1); \quad u'x + u = u\ln u + u; \quad u'x = u\ln u;$$

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dx}{x};$

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C; \quad \ln u = Cx; \quad u = e^{Cx};$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение:

$$y = xe^{Cx}.$$

<u>Уравнения, приводящиеся к однородным.</u>

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой

$$x = u + \alpha; \qquad y = v + \beta;$$

где α и β - решения системы уравнений $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$

<u>Пример.</u> Решить уравнение $(x-2y+3)dy + (2x+y-1)dx = 0.$

Получаем $(x-2y+3)\dfrac{dy}{dx} = -2x-y+1; \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x-y+1}{x-2y+3};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4+1 = 5 \neq 0$.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} -2x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=1-2x \\ x-2+4x+3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-1/5 \\ y=7/5 \end{cases};$

Применяем подстановку $x = u - 1/5; \quad y = v + 7/5;$ в исходное уравнение:

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)dv + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)du = 0;$$
$$(u-2v)dv + (2u+v)du = 0;$$
$$\frac{dv}{du} = \frac{2u+v}{2v-u} = \frac{2+v/u}{2v/u-1};$$

Заменяем переменную $\dfrac{v}{u} = t; \quad v = ut; \quad v' = t'u + t;$ при подстановке в выражение, записанное выше, имеем:

$$t'u + t = \frac{2+t}{2t-1}$$

Разделяем переменные: $\dfrac{dt}{du}u = \dfrac{2+t}{2t-1} - t = \dfrac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \dfrac{2(1+t-t^2)}{2t-1};$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt; \qquad \int\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln|u| + \ln C_1$$
$$\ln\left|1+t-t^2\right| = -2\ln|C_1u|$$
$$\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \quad 1+t-t^2 = \frac{C_2}{u^2};$$

Переходим теперь к первоначальной функции у и переменной х.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y - 7/5}{x + 1/5} = \frac{5y - 7}{5x + 1}; \quad u = x + 1/5;$$

$$1 + \frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C;$$

Итого, выражение $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$ является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

В случае если в исходном уравнении вида $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой

$$ax + by = t.$$

Пример. Решить уравнение $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0.$

Получаем $2(x + y)\frac{dy}{dx} = -3x - 3y + 1; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-3x - 3y + 1}{2x + 2y} = -\frac{3x + 3y - 1}{2x + 2y};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0;$

Применяем подстановку $3x + 3y = t.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t'}{3} - 1;$$

Подставляем это выражение в исходное уравнение:

$$\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t}; \quad 2t(t' - 3) = -9t + 9; \quad 2tt' = 6t - 9t + 9; \quad 2tt' = -3t + 9;$$

Разделяем переменные: $\frac{2t}{-3t + 9}dt = dx; \qquad \frac{t}{t-3}dt = -\frac{3}{2}dx;$

$$\int\left(1 + \frac{3}{t-3}\right)dt = -\frac{3}{2}\int dx;$$

$$t + 3\ln|t - 3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далее возвращаемся к первоначальной функции у и переменной х.

$$2x + 2y + 2\ln|3(x + y - 1)| = -x + C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln 3 + 2\ln|x + y - 1| = C_2;$$
$$3x + 2y + 2\ln|x + y - 1| = C;$$
таким образом, мы получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Линейные уравнения.

Определение. Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при этом, если правая часть *Q(x)* равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка вида

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей.

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$
$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$
$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение: $$y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений (*Q(x)≠0)* применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y = uv$.

При этом очевидно, что $y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y = 2x^2$ может быть представлена как $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$; и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx} + P(x)u = 0$.

Таким образом, возможно получить функцию *u*, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u} = -\int P(x)dx; \qquad \ln|u| = -\int P(x)dx;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)dx; \qquad u = Ce^{-\int P(x)dx}; \quad C = 1/C_1;$$

Для нахождения второй неизвестной функции *v* подставим поученное выражение для функции *u* в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x); \qquad Cdv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию *v*:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1; \qquad v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2;$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y = uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right)$$

Окончательно получаем формулу:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_2\right),}$$ C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа.

(Ларганж Жозеф Луи (1736-1813) - французский математик, през. Берлинской АН, поч. чл. Пет. АН (1776)).

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

Вернемся к поставленной задаче:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного дифференциального уравнения, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x) e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x) e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x) = Q(x) e^{\int P(x)dx} dx;$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C;$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right).}$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных дифференциальных уравнений следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных дифференциальных уравнений различными методами и сравним результаты.

Пример. Решить уравнение $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду: $y' + \dfrac{1}{x^2} y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Применим полученную выше формулу: $P = \dfrac{1}{x^2}$; $\quad Q = ae^{\frac{1}{x}}$;

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}dx}\left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2}dx} dx + C \right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C \right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\int a dx + C \right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

Уравнение Бернулли.

Определение. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n,$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n.

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q;$$

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\dfrac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\dfrac{(n-1)y'}{y^n}$.

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$$

$$z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$$

Т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z.

Решение этого уравнения будем искать в виде:

$$\boxed{\begin{gathered} z = e^{-\int P dx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx} dx + C \right) \\ Q_1 = -(n-1)Q; \qquad P_1 = -(n-1)P. \end{gathered}}$$

Пример. Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x.$

Разделим уравнение на xy^2: $\dfrac{y'}{y^2} + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y} = \ln x.$

Полагаем $z = \dfrac{1}{y}; \quad z' = -\dfrac{y'}{y^2}.$

$$-z' + \frac{1}{x}z = \ln x; \qquad z' - \frac{1}{x}z = -\ln x.$$

Полагаем $P = -\dfrac{1}{x}, \quad Q = -\ln x.$

$$z = e^{\int\frac{dx}{x}}\left(\int -\ln x e^{-\int\frac{dx}{x}}dx + C\right); \qquad z = e^{\ln x}\left(\int -\ln x e^{-\ln x}dx + C\right);$$

$$z = x\left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C\right); \qquad z = x\left(-\int \ln x d(\ln x) + C\right);$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$$

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

Пример. Решить уравнение $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$

Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y}.$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Полагаем $z = \sqrt{y}; \quad z' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}y'; \quad y' = 2\sqrt{y}z';$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}2\sqrt{y}z' - \frac{4}{x}z = x; \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2};$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x};$$

$$\int\frac{dz}{z} = 2\int\frac{dx}{x} + C_1; \quad \ln z = 2\ln x + \ln C; \quad z = Cx^2;$$

Полагаем C = C(x) и подставляем полученный результат в линейное неоднородное уравнение, с учетом того, что:

$$\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx} - \frac{2x^2C(x)}{x} = \frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x}; \qquad C(x) = \frac{1}{2}\ln x + C_2;$$

Получаем: $z = x^2\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right);$

Применяя обратную подстановку, получаем окончательный ответ:

$$y = x^4\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right)^2;$$

Уравнения в полных дифференциалах .

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x, y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции *u*, после чего решение легко находится в виде: $du = 0; \quad u = C.$

Таким образом, для решения надо определить:

1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции *u*;

2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции *u*, то можно записать:

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Т.е. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}.$

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по *y*, а второе – по *x*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем **необходимое и достаточное условие** того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом.

$$\boxed{\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}}$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции *u*.

Проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$:

$$u = \int M(x, y)dx + C(y).$$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину C, а некоторую функцию C(y), т.к. при интегрировании переменная y полагается постоянным параметром.

Определим функцию C(y).

Продифференцируем полученное равенство по y.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + C'(y).$$

Откуда получаем: $C'(y) = N(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx.$

Для нахождения функции C(y) необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция C(y) не зависит от x. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по x равна нулю.

$$\left[C'(y)\right]'_x = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Теперь определяем функцию C(y):

$$C(y) = \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx\right]dy + C$$

Подставляя этот результат в выражение для функции u, получаем:

$$u = \int M(x, y)dx + \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x, y)dx\right]dy + C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\boxed{\int M(x, y)dx + \int\left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x, y)dx\right]dy = C.}$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$

Проверим условие тотальности: $\dfrac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(3x^2 + 10xy)}{\partial y} = 10x;$

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Условие тотальности выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию u.

$$u = \int M(x, y)dx + C(y) = \int(3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x, y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1; \quad C(y) = \int(-1)dy = -y + C_1;$$

Итого, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1$.

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u = x^3 + 5x^2y - y + C_1 = C_2;.$$

$$x^3 + 5x^2y - y = C.$$

Уравнения вида *y = f(y')* и *x = f(y')*.

Решение уравнений, не содержащих в одном случае аргумента *x*, а в другом – функции *y*, ищем в параметрической форме, принимая за параметр производную неизвестной функции.

$$y' = p.$$

Для уравнения первого типа получаем: $y = f(p); \qquad y' = f'(p)\dfrac{dp}{dx}.$

Делая замену, получаем: $p = f'(p)\dfrac{dp}{dx};$

В результате этих преобразований имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

$$dx = \frac{f'(p)}{p}dp; \qquad x = \int\frac{f'(p)}{p}dp + C.$$

Общий интеграл в параметрической форме представляется системой уравнений:

$$\boxed{\begin{cases} x = \displaystyle\int\frac{f'(p)}{p}dp + C \\ y = f(p) \end{cases}}$$

Исключив из этой системы параметр *p*, получим общий интеграл и не в параметрической форме.

Для дифференциального уравнения вида *x = f(y')* с помощью той же самой подстановки и аналогичных рассуждений получаем результат:

$$\boxed{\begin{cases} y = \displaystyle\int pf'(p)dp + C \\ x = f(p) \end{cases}}$$

Уравнения Лагранжа и Клеро.

(Алекси Клод Клеро (1713 – 1765) французский математик
ин. поч. член Петерб. АН)

Определение. **Уравнением Лагранжа** называется дифференциальное уравнение, линейное относительно *x* и *y*, коэффициенты которого являются функциями от *y'*.

$$P(y')x + Q(y')y + R(y') = 0$$

Для нахождения общего решение применяется подстановка *p* = *y'*.

$$y = xf(p) + \varphi(p), \quad f(p) = -\frac{P(y')}{Q(y')}, \quad \varphi(p) = -\frac{R(y')}{Q(y')}.$$

Дифференцируя это уравнение,с учетом того, что $dy = pdx$, получаем:

$$pdx = f(p)dx + xf'(p)dp + \varphi'(p)dp.$$

Если решение этого (линейного относительно *x*) уравнения есть $x = F(p, C)$, то общее решение уравнения Лагранжа может быть записано в виде:

$$\boxed{\begin{cases} x = F(p, C) \\ y = xf(p) + \varphi(p) = F(p, C)f(p) + \varphi(p) \end{cases}}$$

Определение. **Уравнением Клеро** называется уравнение первой степени (т.е. линейное) относительно функции и аргумента вида:

$$y = xy' + \varphi(y').$$

Вообще говоря, уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа. С учетом замены $y' = p$, уравнение принимает вид:

$$y = xp + \varphi(p).$$

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx}; \qquad p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx};$$

$$[x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0;$$

Это уравнение имеет два возможных решения:

$$dp = 0 \text{ или } x + \varphi'(p) = 0.$$

В первом случае: $p = c$;

$$\boxed{y = cx + \varphi(c)}$$

Видно, что общий интеграл уравнения Клеро представляет собой семейство прямых линий.

Во втором случае решение в параметрической форме выражается системой уравнений:

$$\begin{cases} y = xp + \varphi(p) \\ x + \varphi'(p) = 0 \end{cases}$$

Исключая параметр *p*, получаем второе решение F(x, y) = 0. Это решение не содержит произвольной постоянной и не получено из общего решения, следовательно, не является частным решением.

Это решение будет являться особым интегралом.

Далее рассмотрим примеры решения различных типов дифференциальных уравнений первого порядка.

Пример. Решить уравнение с заданными начальными условиями.

$$y' - \frac{y}{x} = x + 1; \quad y(1) = 0.$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.
Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' - \frac{y}{x} = 0; \qquad y' = \frac{y}{x}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}; \qquad \ln y = \ln x + \ln C;$$

$$y = Cx;$$

Для неоднородного уравнения общее решение имеет вид:

$$y = C(x)x;$$

Дифференцируя, получаем: $y' = C'(x)x + C(x);$

Для нахождения функции C(x) подставляем полученное значение в исходное дифференциальное уравнение:

$$C'(x)x + C(x) - C(x) = x + 1$$

$$xC'(x) = x + 1$$

$$C'(x) = 1 + \frac{1}{x}; \qquad C(x) = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + C;$$

$$C(x) = x + \ln x + C;$$

Итого, общее решение: $\boxed{y = x(x + \ln x + C).}$

С учетом начального условия $y(1) = 0$ определяем постоянный коэффициент C.

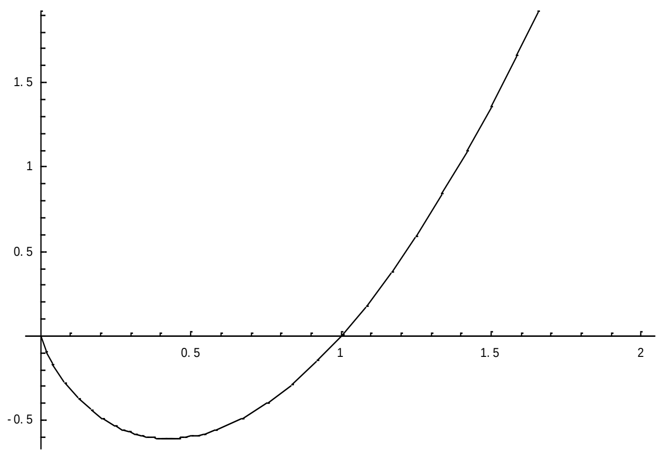
$$0 = 1 + \ln 1 + C; \qquad C = -1.$$

Окончательно получаем: $\boxed{y = x^2 + x\ln x - x.}$

Для проверки подставим полученный результат в исходное дифференциальное уравнение:

$2x + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 - x - \ln x + 1 = x + 1;$ верно

Ниже показан график интегральной кривой уравнения.



<u>Пример.</u> Найти общий интеграл уравнения $x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0$.

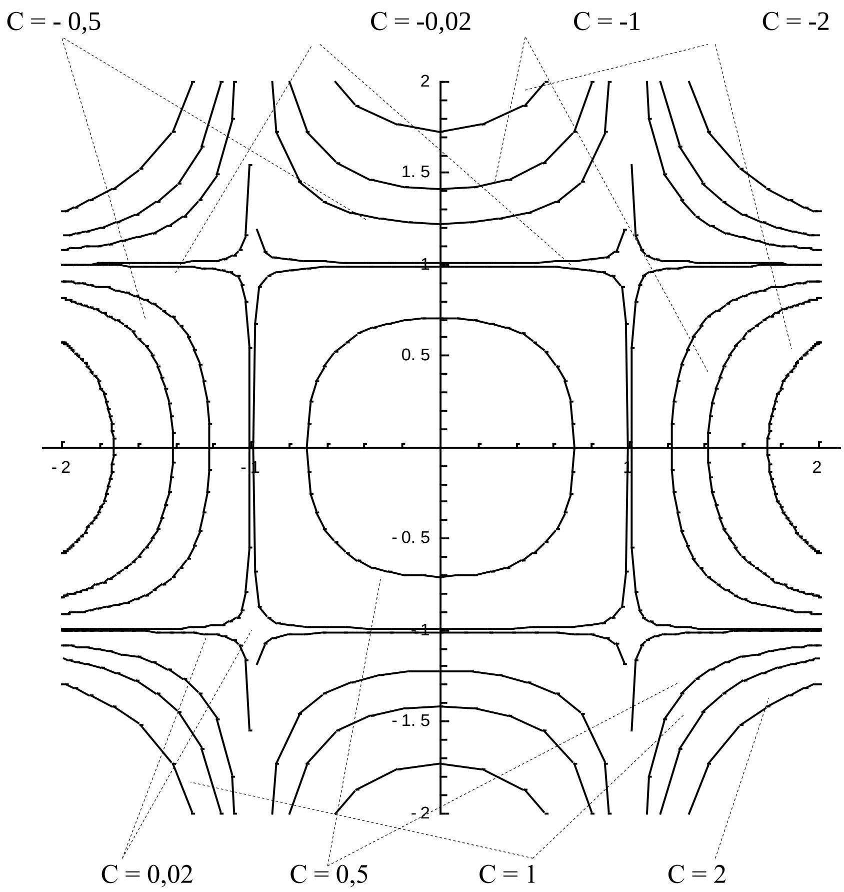
Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{xdx}{x^2 - 1} + \frac{ydy}{y^2 - 1} = 0; \qquad \int \frac{xdx}{x^2 - 1} = -\int \frac{ydy}{y^2 - 1};$$

$$\ln\left|x^2-1\right|+\ln\left|y^2-1\right|=\ln C;$$

Общий интеграл имеет вид: $\boxed{(x^2-1)(y^2-1)=C.}$

Построим интегральные кривые дифференциального уравнения при различных значениях C.



Пример. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$y'\cos x=(y+1)\sin x; \qquad y(0)=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{y'}{y+1}=\frac{\sin x}{\cos x}; \quad \frac{dy}{y+1}=tgxdx;$$

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int tgxdx; \qquad \ln\left|y+1\right|=-\ln\left|\cos x\right|+\ln C;$$

$$\ln\left|(y+1)\cos x\right|=\ln C; \qquad (y+1)\cos x=C;$$

Общее решение имеет вид: $\boxed{y=\frac{C}{\cos x}-1.}$

Найдем частное решение при заданном начальном условии *y(0) = 0*.

$$0=\frac{C}{1}-1; \qquad C=1.$$

Окончательно получаем: $\boxed{y = \dfrac{1}{\cos x} - 1.}$

Пример. Решить предыдущий пример другим способом.

Действительно, уравнение $y'\cos x = (y+1)\sin x$ может быть рассмотрено как линейное неоднородное дифференциальное уравнение.

$$y'\cos x - y\sin x = \sin x.$$

Решим соответствующее ему линейное однородное уравнение.

$$y'\cos x - y\sin x = 0; \qquad y'\cos x = y\sin x; \qquad \frac{dy}{y} = tgxdx;$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int tgxdx + \ln C; \qquad \ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln C; \qquad y\cos x = C;$$

$$y = \frac{C}{\cos x}.$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $y = \dfrac{C(x)}{\cos x}$.

Тогда $y' = \dfrac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}$.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{[C'(x)\cos x + C(x)\sin x\,\cdot]\cos x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)\sin x}{\cos x} = \sin x;$$

$$\frac{C'(x)\cos x}{\cos x} = \sin x; \qquad C'x) = \sin x; \qquad C(x) = \int\sin xdx = -\cos x + C;$$

Итого $y = \dfrac{-\cos x + C}{\cos x}$; $\qquad \boxed{y = \dfrac{C}{\cos x} - 1;}$

С учетом начального условия y(0) = 0 получаем $\boxed{y = \dfrac{1}{\cos x} - 1;}$

Как видно результаты, полученные при решении данного дифференциального уравнения различными способами, совпадают.

При решении дифференциальных уравнений бывает возможно выбирать метод решения, исходя из сложности преобразований.

Пример. Решить уравнение $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ с начальным условием y(0) = 0.

Это линейное неоднородное уравнение. Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' + y\cos x = 0; \qquad \frac{dy}{y} = -\cos x dx; \qquad \ln|y| = -\sin x + C_1;$$

$$y = e^{-\sin x} \cdot e^{C_1}; \qquad y = Ce^{-\sin x};$$

Для линейного неоднородного уравнения общее решение будет иметь вид:

$$y = C(x)e^{-\sin x};$$

Для определения функции C(x) найдем производную функции y и подставим ее в исходное дифференциальное уравнение.

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x;$$

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x;$$

$$C'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x; \qquad C'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x;$$

$$C(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x dx = \left\{ \begin{matrix} V = e^{\sin x}; & dU = \cos x dx; \\ dV = e^{\sin x}\cos x dx; & U = \sin x; \end{matrix} \right\} = e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x dx =$$

$$= e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C.$$

Итого $y = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C\right);$ $\boxed{y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x};}$

Проверим полученное общее решение подстановкой в исходное дифференциальное уравнение.

$$\cos x + Ce^{-\sin x}(-\cos x) + \sin x\cos x - \cos x + Ce^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x; \text{ (верно)}$$

Найдем частное решение при y(0) = 0.

$$0 = \sin 0 - 1 + Ce^0; \qquad C = 1.$$

Окончательно $\boxed{y = \sin x + e^{-\sin x} - 1.}$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$$

с начальным условием y(1) = 1.

Это уравнение может быть преобразовано и представлено как уравнение с разделенными переменными.

$$20x - 3yy' = 3x^2yy' - 5xy^2; \qquad 3yy'(x^2+1) = 5x(y^2+4);$$

$$y'\frac{3y}{y^2+4} = \frac{5x}{x^2+1}; \qquad \frac{3y}{y^2+4}dy = \frac{5x}{x^2+1}dx;$$

$$\int\frac{3y}{y^2+4}dy = \int\frac{5x}{x^2+1}dx;$$

$$\frac{3}{2}\ln(y^2+4) = \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \ln C_1$$

$$(y^2+4)^3 = C\cdot(x^2+1)^5; \qquad y^2 + 4 = C\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2};$$

$$y^2 = C(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - 4;$$

$$\boxed{y = \sqrt{C(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - 4};}$$

С учетом начального условия:

$$1 = \sqrt{C \cdot 2^{\frac{5}{3}} - 4} = \sqrt{C\sqrt[3]{32} - 4}; \qquad 1 = 2C\sqrt[3]{4} - 4; \qquad 5 = 2C\sqrt[3]{4}; \qquad 125 = 8C^3 \cdot 4; \quad C^3 = \frac{125}{32};$$

$$C = \frac{5}{2\sqrt[3]{4}}.$$

Окончательно $\boxed{y = \sqrt{5\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} - 4}.}$

<u>Пример.</u> Решить дифференциальное уравнение $xy' + y = x + 1$ с начальным условием y(1) = 0.

Это линейное неоднородное уравнение.
Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$xy' + y = 0; \qquad \frac{xdy}{dx} = -y; \qquad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \qquad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C;$$

$$xy = C; \qquad y = \frac{C}{x};$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y = \frac{C(x)}{x};$$

Подставим в исходное уравнение:

$$x\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = x + 1; \qquad \frac{C'(x)x}{x} = x + 1; \qquad C'(x) = x + 1;$$

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C;$$

Общее решение будет иметь вид: $\boxed{y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C}{x};}$

С учетом начального условия y(1) = 0: $0 = \frac{1}{2} + 1 + C; \qquad C = -\frac{3}{2};$

Частное решение: $\boxed{y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2x} + 1;}$

<u>Пример.</u> Найти решение дифференциального уравнения $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ с начальным условием y(1) = e.

Это уравнение может быть приведено к виду уравнения с разделяющимися переменными с помощью замены переменных.

Обозначим: $\ln\left(\frac{y}{x}\right) = u;$ $\quad \frac{y}{x} = e^u;$ $\quad y = xe^u;$ $\quad y' = xu'e^u + e^u;$

Уравнение принимает вид:

$$xu'e^u + e^u = e^u u; \qquad xu' + 1 = u; \qquad xu' = u - 1;$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$x\frac{du}{dx} = u - 1; \qquad \frac{du}{u-1} = \frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{du}{u-1} = \int\frac{dx}{x}; \qquad \ln|u-1| = \ln|x| + \ln C; \qquad u - 1 = Cx;$$

Сделаем обратную замену: $Cx = \ln\left(\frac{y}{x}\right) - 1;$ $\quad \ln\left(\frac{y}{x}\right) = Cx + 1;$ $\quad \frac{y}{x} = e^{Cx+1};$

Общее решение: $\boxed{y = xe^{Cx+1};}$

С учетом начального условия y(1) = e: $\quad e = e^{C+1};$ $\quad C = 0;$

Частное решение: $\boxed{y = ex;}$

Второй способ решения.

$$xy' = y\ln\frac{y}{x};$$

$$xy' = y\ln y - y\ln x;$$

$$y' - \frac{y}{x}\ln y = -\frac{y}{x}\ln x;$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Соответствующее однородное:

$$y' - \frac{y}{x}\ln y = 0;$$

$$y' = \frac{y}{x}\ln y; \qquad \frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{x}; \qquad \int\frac{d(\ln y)}{\ln y} = \int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|\ln y| = \ln|x| + \ln C; \qquad \ln y = Cx; \qquad y = e^{Cx};$$

Решение исходного уравнения ищем в виде: $y = e^{C(x)x};$

Тогда $y' = e^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right);$

Подставим полученные результаты в исходное уравнение:

$$xe^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right) = e^{C(x)x}\ln\frac{e^{C(x)x}}{x};$$

$$x^2C'(x) + xC(x) = C(x)x - \ln x;$$

$$x^2C'(x) = -\ln x; \qquad C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2};$$

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{dx}{x^2}; \\ du = \dfrac{dx}{x}; & v = -\dfrac{1}{x}; \end{matrix}\right\} = -\left[-\frac{\ln x}{x} - \int \frac{-dx}{x^2}\right] = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C;$$

$$y = e^{C(x)x} = e^{\ln x + 1 + Cx} = xe^{Cx+1};$$

Получаем общее решение: $\boxed{y = xe^{Cx+1};}$

<u>Пример.</u> Решить дифференциальное уравнение $y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$ с начальным условием y(1)=0.

В этом уравнении также удобно применить замену переменных.

$$e^{\frac{y}{x}} = u; \qquad \frac{y}{x} = \ln u; \qquad y = x\ln u; \qquad y' = \ln u + \frac{xu'}{u};$$

Уравнение принимает вид: $\ln u + \frac{xu'}{u} + u - \ln u = 0; \qquad xu' + u^2 = 0;$

$$xu' = -u^2; \qquad \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C; \qquad \frac{1}{u} = \ln Cx;$$

Делаем обратную подстановку: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx; \qquad -\frac{y}{x} = \ln(\ln Cx);$

Общее решение: $\boxed{y = -x\ln(\ln Cx);}$

С учетом начального условия y(1) = 0: $0 = -\ln(\ln C); \qquad C = e;$

Частное решение: $\boxed{y = -x\ln(\ln ex);}$

<u>Второй способ решения.</u>

$$y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

Замена переменной: $u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u;$

$$u'x + u + e^u - u = 0$$

$$u'x + e^u = 0$$

$$\frac{du}{dx}x = -e^u$$

$$-e^{-u}du = \frac{dx}{x}$$

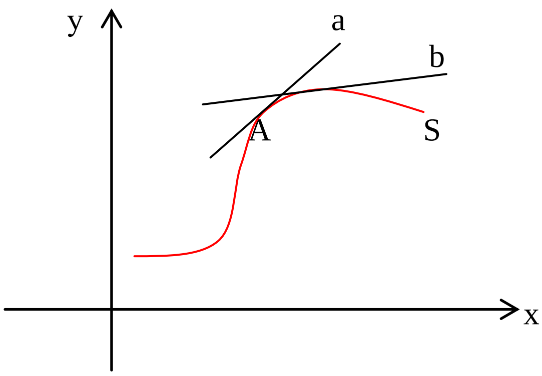
$$-\int e^{-u}du = \int \frac{dx}{x};$$

$$e^{-u} = \ln|x| + \ln C; \qquad e^{-u} = \ln|Cx|;$$

$$-u = \ln(\ln|Cx|); \qquad u = -\ln(\ln|Cx|);$$

Общее решение: $\boxed{y = -x\ln(\ln Cx);}$

Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.



Как уже говорилось выше линия S, которая задается функцией, являющейся каким-либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Производная y' является **угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.**

В любой точке A(x, y) интегральной кривой этот угловой коэффициент касательной может быть найден еще до решения дифференциального уравнения.

Т.к. касательная указывает направление интегральной кривой еще до ее непосредственного построения, то при условии непрерывности функции f(x, y) и непрерывного перемещения точки A можно наглядно изобразить **поле направлений** кривых, которые получаются в результате интегрирования дифференциального уравнения, т.е. представляют собой его общее решение.

Определение. Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется **полем направлений.**

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые, у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

Определение. Линии равного наклона в поле направлений называются **изоклинами**.

Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса уравнений. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата.

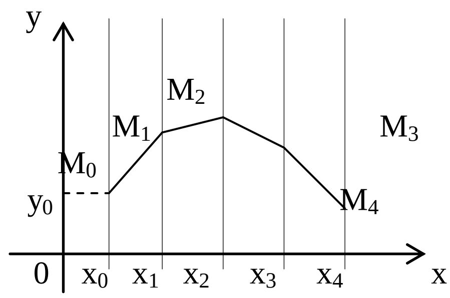
Рассмотрим некоторые из них.

Метод Эйлера.

(Леонард Эйлер (1707 – 1783) швейцарский математик)

Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек x_0, x_1, x_2, …. и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию.



При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке

$$tg\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0).$$

Заменив на отрезке [x_0, x_1] интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Производя аналогичную операцию для отрезка [x_1, x_2], получаем:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется **ломаной Эйлера**.

Можно записать общую формулу вычислений:

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).}$$

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h, называемое шагом вычисления, то получаем формулу:

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h}$$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, конечно, уменьшив шаг вычислений, однако, это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый **уточненный метод Эйлера** или **формула пересчета**.

Суть метода состоит в том, что в формуле $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ вместо значения $y'_0 = f(x_0, y_0)$ берется среднее арифметическое значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1)$. Тогда уточненное значение:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2} h;$$

Затем находится значение производной в точке $(x_1, y_1^{(1)})$. Заменяя $f(x_0, y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1^{(1)})$, находят второе уточненное значение y_1.

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2} h;$$

Затем третье:

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})}{2} h;$$

и т.д. пока два последовательных уточненных значения не совпадут в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки M_1 ломаной Эйлера.

Аналогичная операция производится для остальных значений y.

Подобное уточнение позволяет существенно повысить точность результата.